Edith Tönies

AUFGABEN ZUM ARGUMENTIEREN UND BEGRÜNDEN UND DEREN BENOTUNG

Vortrag gehalten anläßlich der Lehrerfortbildungstagung 1993

INHALT:

Edith Tönies

AUFGABEN ZUM ARGUMENTIEREN UND BEGRÜNDEN UND DEREN BENOTUNG

1. Bezug zum Lehrplan

Im derzeit gültigen Lehrplan für die AHS wird in der "Bildungs- und Lehraufgabe" neben anderen Lernzielen (Tabelle 1) auch das allgemeine Lernziel "Argumentieren" angeführt und als eine seiner Präzisierungen "Begründen" mit dem nachgesetzten Wort "Beweisen" in Klammern angegeben.

Die Vernetzung der Kenntnisse und Fähigkeiten der Schüler und Schülerinnen als wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts zeigt sich bereits in diesem allgemein gehaltenen Lehrplanteil, weil im Bereich m e h r e r e r dort angeführter Lernziele Argumentationen nötig sind. Versucht man, aus der Liste der Lernziele alle jene auszuwählen, die dieses Lernziel "Argumentieren" berühren, erhält man die in Tabelle 1 durch Numerierung hervorgehobene Lernzielliste. Sie bildet die Basis der folgenden Ausführungen.

T a b e l l e 1

AUSZUG AUS DER "BILDUNGS- UND LEHRAUFGABE".
KAPITEL: ALLGEMEINE MATHEMATISCHE FÄHIGKEITEN

(Die für den Vortrag relevanten Lernziele sind numeriert)

- Produktives geistiges Arbeiten

    Kombinieren vertrauter Methoden;
(1) Analysieren von Problemen, Begründungen, Darstellungen oder mathematischen Objekten
    Anwenden bekannter Verfahren in Anwendungssituationen oder in teilweise neuartigen Situationen;
    Abstrahieren und Konkretisieren
    Verallgemeinern und Spezialisieren.

- Argumentieren und exaktes Arbeiten

(2) präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren);
    Arbeiten unter bewußter Verwendung von Regeln;
(3) Begründen (Beweisen);
(4) Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl

eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform).

- Kritisches Denken

(5) überprüfen von Vermutungen;
(6) überprüfen von Ergebnissen;
(7) Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle;
(8) Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen;
(9) überlegen von Bedeutungen mathematischer Methoden und Denkweisen;
(10) Überlegen der Bedeutung des Mathematikunterrichts für die eigene Person.

- Darstellen und Interpretieren

(11) verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten;
geometrisch-zeichnerisches Darstellen von Objekten;
(12) Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen;
(13) Erstellen und Interpretieren von mathematischen Modellen außermathematischer Sachverhalten.

Bemerkung: Die Reihenfolge der angeführten Lernziele unterscheidet sich im Unterstufen- und Oberstufenlehrplan.

2. Zur Wortwahl "Argumentieren" und "Begründen"

Schlägt man das zur Diskussion stehende und im Vortragstitel verwendete Vokabular in entsprechenden Nachschlagwerken nach, finden sich beispielsweise die folgenden Sichtweisen:

Im Fremdwörter-DUDEN heißt "argumentieren": Argumente vorbringen, seine Beweise darlegen, beweisen, begründen; und "Argument" wird als "etwas, was zur Rechtfertigung, Begründung oder als Beweis vorgebracht wird" angegeben. Allerdings gibt es neben dieser Bedeutung auch noch eine Reihe anderer - teils überraschender - weiterer Bedeutungen.

Wagt man sich an das auch in der Umschreibung der Bedeutung von "Argumentieren" vorkommende Wort "Begründen" heran, wird die Sache reizvoller und komplexer: über "Wissenschaftliche Erklärung und Begründung" schreibt Wolfgang STEGMÜLLER 800 Seiten. Er unterscheidet zwischen "deduktiv-nomologischen" (DN) und "induktiv-statistischen" (IS) Erklärungen (S 83). Deduktiv-nomologische Erklärungen enthalten Antecedensbedingungen und Gesetzmäßigkeiten, statistische Erklärungen enthalten eventuell in den Prämissen und sicher im "Explanans" mindestens ein probabilistisches Gesetz. (S 630/631). Allerdings wird diese Begriffsbildung auf Seite 702 dadurch wesentlich verändert, daß die genannten Arten von "Erklärungen" wohlbegründet in "Begründungen" umbenannt werden.

Es ist daher vermutlich nicht falsch, wenn wir Mathematiklehrer und Mathematiklehrerinnen angesichts der philosophischen Schwierigkeiten unseres Lehrplanvokabulars bei einem intuitiven Verständnis der Begriffe "Argumentieren" und "Begründen" verbleiben und versuchen, etwas Sinnvolles für den Unterricht daraus zu machen. -

3. Übersicht über die ausgewählten Aufgaben

Gelegenheiten für das Argumentieren und Begründen finden sich im Rahmen der Lernzielliste der Tabelle 1, und zwar bei den dort mit Nummern versehenen Detailangaben der Bildungs- und Lehraufgabe. Die Reihenfolge von 1 bis 13 ergab sich aus der Abfolge des Lehrplantextes und stellt keine Wertung dar.

Da ein Ziel dieser Arbeit die Behandlung der Benotung von Aufgaben zum Argumentieren und Begründen ist, möchte ich mich auf Aufgabenstellungen beschränken, bei denen eine solche Benotung auch tatsächlich von mir durchgeführt wurde. Ich möchte mich auf Schularbeitstexte beschränken, weil sie schriftlich vorliegen und die Schülerleistungen nachprüfbar sind. Allerdings kann ich nur auf meine eigenen Texte zurückgreifen und daher für meine Ausführungen keine Allge meingültigkeit beanspruchen. Ich sehe sie daher als exemplarisch an, als e i n e Möglichkeit von vielen, mit den Anforderungen, die der Lehrplan stellt, umzugehen.

Leider habe ich seit Jahren keine erste Klasse unterrichtet. Daher verfüge ich über keine Aufgabenstellungen für diesen Jahrgang. Von der zweiten bis zur achten Klasse liegen mir insgesamt 28 Texte vor, die Aufgaben mit Bezug zur Themenstellung "Argumentieren und Begründen" enthalten. Insgesamt stammen diese Texte von 9 Klassen, von der 4. und und 5 Klasse je zwei Jahrgänge, sonst je einer. Die angegebene Zahl von 28 Schularbeitstexten stellt eine Untergrenze insofern dar, als ich vielleicht auch bei anderen, hier nicht berücksichtigten Schularbeiten dieser Klassen Aufgaben zum Argumentieren und Begründen gestellt habe. Ich bedaure, über keine vollständige Dokumentation zu verfügen.

Die Texte verteilen sich wie folgt auf die Unter- und die Oberstufe: 13 Unterstufen-Schularbeiten (4-3-6 für di 2. bis 4. Klasse) stehen 15 Oberstufen-

Schularbeiten gegenüber (8-3-1-3 für die 5. bis 8. Klasse). Ich habe offensichtlich geren auch junge Schüler und Schülerinnen mit Aufgaben zum Argumentieren und Begründen konfrontiert.

In den 28 Texten finden sich 52 Aufgaben oder Aufgabenteile mit Bezug zum Thema. Bevor ich aber darauf eingehe, welche Arten von Aufgaben ich für die diversen Schuarbeiten zusammenstellte, möchte ich drei Aufgabentexte vorlegen, mit deren Hilfe die folgende Klassifizierung etwas verständlicher wird:

T a b e l l e 2

Drei exemplarische Aufgaben zum "Argumentieren und Begründen"

1. 4. Klasse:

Erkläre, weshalb man Berechnungen an Vierecken mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes durchführen kann, obwohl der Pythagoräische Lehrsatz nur in rechtwinkeligen Dreicken gültig ist. Fertige dazu auch für ein Viereck deiner Wahl eine Skizze an, die deine Erklärung unterstützt.

2. 3. Klasse:

a) $a^4 \cdot a^3 = a^7$ $\qquad \frac{a^6}{a^4} = a^2$

Erkläre, weshalb die Ergebnisse richtig sind, indem du die beiden Rechnungen anders aufschreibst. Gib dann auch zu jeder Rechnung die Rechenregel an.

b) In welchen Fällen hat die Potenz a^n einen positiven Wert und in welchem Fall hat sie einen negativen Wert?

c) Erkläre, weshalb 2^3 und 3^2 nicht den gleichen Wert haben.

d) Berechne $(-2)^4$ und -2^4 . Erkläre, weshalb die beiden Potenzen einen verschiedenen Wert haben.

3. 7. Klasse:

Welche geometrischen Vorstellungen verbindest du mit dem Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten? (Gib zwei Möglichkeiten an.)

4. Klassifizierung der Aufgabenstellungen

Aufgaben zum Argumentieren und Begründen können von sehr unterschiedlicher Art sein, wie die drei in Tabelle 2 angeführten Beispiele zeigen. Sie sprechen offensichtlich unterschiedliche Fähigkeiten an. Daher erscheint es sinnvoll, zunächst eine Klassifizierung einzuführen, die auf diese unterschiedlichen Fähigkeiten Rücksicht nimmt:

T a b e l l e 3

KLASSIFIZIERUNG VON SCHULARBEITSTEXTEN NACH DEN GEFORDERTEN SCHÜLERFÄHIGKEITEN

1. Aufgaben, die ausschließlich verbal zu beantworten sind (V)
2. Aufgaben, die eine Formel oder Rechnung u n d eine verbale Bearbeitung erfordern (FV)
3. Aufgaben, die einen allgemeinen Beweis verlangen (BA)
4. Aufgaben, die einen exemplarischen Beweis verlangen (BE)
5. Aufgaben, die eine verbale Erklärung u n d eine Skizze erfordern (VS)
6. Aufgaben, die das Aufstellen einer Formel verlangen (F)
7. Aufgaben, die eine Skizze + eine Formel erfordern. (SF)

Meine persönlichen Schwerpunkte lagen bei ausschließlich verbalen Aufgaben (V: 22) und allgemeinen Beweisen (BA: 10), gefolgt von je 7 Texten, die einen exemplarischen Beweis (BE) bzw. eine Formel oder Rechnung + Argument (FV) verlangten. Die anderen Zuordnungen traten nur vereinzelt auf: verbale Erklärung + Skizze (VS) viermal, Aufstellen einer Formel (F) bzw. Skizze + Formel (SF) je einmal.

Zum Verständnis dieser Klassifizierung werden zu den Aufgaben aus Tabelle 2 drei Schülerantworten vorgelegt, amhand derer die Durchführung der Klassifzierung ersichtlich wird:

T a b e l l e   4

SCHÜLERANTWORTEN ZU DEN FRAGESTELLUNGEN IN TABELLE 2

1. 4. Klasse:

In Vierecken kann mit Hilfe von Höhen ein rechtwinkeliges Dreieck gebildet werden. Man muß die Vierecke unterteilen, die Höhe bildet immer den rechten Winkel und dann kann der Satz von Pythagoras angewendet werden.

```
         ---------------
        /!            . /
       / !        .    /
      /  !    .       /
     /   !           /
    /____!__________/
```

2. 3. Klasse:

a) a.a.a.a . a.a.a.a.a = a^7
Man multipliziert zwei Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten addiert.

$$\frac{a.a.a.a.a.a}{a.a.a.a} = a^2$$

Man dividiert zwei Potenzen mit gleicher Basis, inden man die Exponenten subtrahiert.

b) a^n hat einen positiven Wert, wenn ein + davor steht oder ein - davorsteht und die Hochzahl eine gerade Zahl ist.
a^n hat einen negativen Wert, wenn ein Minus davor steht und die Hochzahl eine ungerade Zahl ist.

c) Weil man bei der Potenz 2^3 den 2 3mal mit sich selber multiplizieren muß und bei der Potenz 3^2 den 3 zweimal mit sich selbst multiplizieren muß und die Ergebnisse sind da verschieden.

d) $(-2)^4 = 16$ Bei dieser Rechnung bezieht sich die Hochzahl auf alles in der Klammer.
$-2^4 = -16$ Hier bezieht sich die Hochzahl nur auf das vorhergehende Zeichen. Das Minus wird erst nach dem Rechnen der Potenz berücksichtigt.

3. 7. Klasse:

Die Sekante wird zur Tangente.
Punkt Q wandert auf der Kurvenlinie in Richtung P, bis P und Q ein Punkt sind.

Offensichtlich ist die erste Aufgabe aus Tabelle 2 für die vierte Klasse unter Punkt 5 der Tabelle 3 einzureihen (verbale Erklärung + Skizze).

Bei Aufgabe 2 für die 3. Klasse, die aus vier Aufgabenteilen besteht, liegen folgende Zuordnungen nahe:

a) Punkt 2 (Formel/Rechnung + verbal). Einige Schüler haben aber das Rechengesetz ebenfalls als Formel aufgeschrieben, was ich natürlich akzeptiert habe.
b) Punkt 1 (aussschließlich verbal)
c) Punkt 1 (ausschließlich verbal), etliche Schüler haben zusätzlich auch noch die Rechnung hinzugefügt.
d) Punkt 2 (Formel/Rechnung + verbal).

Die dritte Aufgabe für die siebente Klasse ist ebefalls verbal zu beantworten (Punkt 1).

5. Zuordnung zu den allgemeinen Bildungszielen

Beim Zusammenstellen einer Schularbeit überlegt man zwar sehr genau den vorangegangenen Unterrichtsverlauf, hat aber meist nicht routinemäßig die "Allgemeinen Bildungsziele" des Mathematikunterrichts aufgeschlagen vor sich liegen. Daher war es für mich interessant, herauszufinden, wie sehr ich sie trotzdem berücksichtigt habe.

Betrachtet man unter diesem Aspekt neuerlich die Tabellen 1 und 2, so sind folgende Zuordnungen möglich:

1. 4. Klasse: Diese Aufgabe berührt drei allgemeine Bildungsziele:
(1) Analysieren von Problemen
(4) Rechtfertigen eines Lösungsweges
(12) Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen

2. 3. Klasse: Alle vier Teilaufgaben, die scheinbar so unterschiedlich sind, verwirklichen ein Bildungsziel:
(6) überprüfen von Ergebnissen.

3. 7. Klasse: Diese Aufgabe war schwer zuzuordnen. Das Lernziel (11), verbales Darstellen

von Sachverhalten, schien noch am ehesten passend.

Führt man eine Zuordnung zu allgemeinen Bildungszielen (aBz) mit Hilfe von Tabelle 1 für alle 28 Texte oder Textteile durch, die ich in die Untersuchung aufgenommen haben, so zeigt sich, daß meine Vorlieben

* beim "Begründen/Beweisen" (12 Aufgaben, aBz 3),
* beim "überprüfen von Vermutungen" (6 Aufgaben, aBz 5),
* beim "überprüfen von Ergebnissen" (10 Aufgaben, aBz 6)
* beim "verbalen/formalen/graphischen Darstellen" (20 Aufgaben, aBz 11)

liegen.

Beim Vergleich von Unter- und Oberstufe zeigt sich bei dieser lehrplannahen Klassifizierung der Aufgaben, daß die Lernziele 3 [Begründen (Beweisen)] und 11 (verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten) in der Oberstufe häufiger vorkommen als in der Unterstufe (4:8 bzw. 5:15). Diese Aussage ist aber als Vermutung zu werten, nicht als statistisch gesichertes Ergebnis.

6. Probleme der Notengebung

Das Zusammenstellen von Schularbeitsaufgaben erfolgt vernünftigerweise unter Bedachtnahme auf den vorangegangenen Unterricht. Selbstverständlich fragt man sich bei dieser Arbeit, ob man mit gutem Recht von den Schülern und Schülerinnen verlangen kann, die gestellten Aufgaben zu lösen. Von Klasse zu Klasse sind aber - auch bei gleichem Thema - wegen begründeter Unterschiede im Unterrichtsverlauf und in der Schwerpunktsetzung durch den Lehrer unterschiedliche Exaktheitsniveaus zu erwarten, sodaß es für einen Außenstehenden grundsätzlich schwierig ist, vorherzusehen, ob eine Aufgabe einer ihm nicht bekannten Klasse schwer oder leicht fallen wird. Ähnliche Überlegungen betreffen auch die Notengebung.

Trotz dieser Einschränkungen möchte ich nun darauf eingehen, wie die Schüler und Schülerinnen die Aufgabenstellungen aus Tabelle 2 bewältigt haben. Ich glaube aber, daß die Wertigkeit dieser Aufgaben nur einschätzbar ist, wenn man den g a n z e n Schularbeitstext kennt:

T a b e l l e   5

1. 4. Klasse: Vollständiger Schularbeitstext:

1. Die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 1 kleiner als die Einerziffer. Vertauscht man die Ziffern, so ist das Doppelte der neuen Zahl um 74 größer als die ursprüngliche Zahl. Berechne beide Zahlen.

2. a) Ein Basiswinkel in einem gleichschenkeligen Dreieck ist um 36° größer als der Winkel an der Spitze. Berechne alle Winkel.
   b) Gegeben ist eine Zahl. Wenn man vom Fünffachen der gegebenen Zahl die Hälfte der gegebenen Zahl subtrahiert, erhält man um 15 mehr als das Dreifache der gegebenen Zahl. Berechne die Zahl.

3. a) Erkläre, weshalb man Berechnungen an Vierecken mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes durchführen kann, obwohl der Pythagoräische Lehrsatz nur in rechtwinkeligen Dreicken gültig ist. Fertige dazu auch für ein Viereck deiner Wahl eine Skizze an, die deine Erklärung unterstützt.
   b) Die Diagonalen einer Raute haben die Längen e = 12cm, f = 6,8cm. Fertige eine Skizze der Raute an und berechen ihren Umfang.

4. Gegeben ist ein Deltoid: a = 5cm, b = 7cm, f = 7cm. Konstruiere das Deltoid und berechne seinen Flächeninhalt.

Aus diesem Schularbeitstext ist, wie erinnerlich, Aufgabe 3a im Laufe dieser Ausführungen näher besprochen worden. Bei richtiger Lösung der Aufgaben erhielt man je 8 Punkte, wobei Aufgabe 3 in 4 + 4 Punkte aufgeteilt wurde. Dies bedeutet, daß 12,5% der erhältlichen Punkte auf eine Aufgabe entfielen, die keine reine "Rechenaufgabe" war.

Die Schularbeit ist vom Ergebnis her als Extremfall zu sehen, da mit 12 Sehr gut, 7 Gut, 3 Befriedigend und einem Nicht genügend sicherlich eine ungewöhnliche Notenverteilung vorliegt. Die Beantwortung der Aufgabe 3a erfolgte in 15 Fällen zu meiner vollen Zufriedenheit, in 5 Fällen wurde ein Punkt abgezogen, in zwei Fällen zwei Punkte und in einem Fall drei Punkte. Die verlangte Skizze haben alle geschafft.

Um klarzustellen, was ich als "richtig" gelten ließ und was nicht, möchte ich einige Schülerantworten anführen. Dabei wird auf die Wiedergabe der Skizzen verzichtet. Ich hätte grundsätzlich auch Freihandskizzen akzeptiert, weil im achten Schuljahr die Befähigung zum Zeichnen paralleler Strecken ohne Lineal vorhanden sein müßte. Aber fast alle Schüler und Schülerinnen verwendeten ein Lineal.

Beispiele für Schülerantworten:

1. Eine Schülerin zeichnete ein Rechteck mit der Diagonale BD und schrieb dazu:
   "Man kann den Pythagoräischen Lehrsatz anwenden, weil wenn man die Diagonalen einzeichnet, hat man zwei rechtwinkelige Dreiecke."
   Die Schülerin skizzierte zusätzlich die beiden Dreiecke und zeichnete die rechten Winkel ein.

   Beurteilung: richtig (4 Punkte)

2. Ein Schüler zeichnete ein Trapez. In das Trapez wurden beide Diagonalen und vom Punk C und D weg die beiden Höhen eingezeichnet. Zwischen den Höhen und der Seite a des Trapezes befand sich das Zeichen für den rechten Winkel. Er schrieb:
   "Weil man die Höhen einzeichnen kann und mit Hilfe der Höhen bekommt man einen rechten Winkel.".
   Vom "rechten Winkel" im Text führte ein Pfeil zu einem rechten Winkel in der Zeichnung.

   Beurteilung: richtig (4 Punkte)

3. Eine Schülerin zeichnete ebenfalls ein Trapez mit den beiden Diagonalen und den entsprechenden Höhen. Sie schrieb dazu:
   "Bei einem Trapez muß man mit dem Pythagoräischen Lehrsatz die Diagonalen e und f ausrechnen. Oder wenn man sich a und b ausrechnet. Den Pythagoräischen Lehrsatz kann man sonst nur bei Dreiecken anwenden."

   Beurteilung: Skizze richtig, Antwort falsch (1 Punkt)

4. Eine andere Schülerin zeichnete eine Raute mit den beiden Diagonalen und einem Zeichen für den rechten Winkel beim Schnittpunkt der Diagonalen.
   "Wenn man von A eine Strecke zu C zeichnet und von B eine Strecke zu D, erhält man die beiden Diagonalen. Diese kreuzen sich und halbieren sich und bilden rechte Winkel. Nun kann man den Pythagoräischen Lehrsatz anwenden.
   $a = (e/2)^2 + (f/2)^2$"

   Beurteilung: Je ein halber Punkt Abzug für "kreuzen" und für das vergessene Quadrat bei der Seite a in der angegebenen Formel.

Diese Beispiele zeigen, daß die Vierzehnjährigen natürlich mit dem sprachlichen Ausdruck kämpfen. Es ist nicht immer leicht zu entscheiden, ob dabei die richtige Botschaft "durchkommt" oder nicht. Daher erfordert die Verbesserung derartiger Aufgabenlösungen stets mehr Zeit als die Kontrolle einer Rechnung. Auch das Abwägen der Punktevergabe ist schwieriger als die sonstige Verbesserungsarbeit, weil man nicht unreflektiert auf Gewohnheiten von der Art "ein Rechenfehler, ein Vorzeichenfehler, eine falsche Formel... ist diesen oder jenen Abzug wert" zurückgreifen kann. Es darf aber nicht vergessen werden, daß auch die erstgnannten Beurteilungen, die wir mit so viel Sicherheit durchführen, zum Teil "liebe Gewohnheiten" sind, die ebenfalls einer Diskussion zugänglich sein sollten.

Es empfiehlt sich bei der Verbesserung verbaler Leistungen der Schüler und Schülerinnen, ausführlich vorgenommene Punkteabzüge zu kommentieren. Dadurch sind Überlegungen zu "richtig oder falsch" auch den Betroffenen zugänglich.

T a b e l l e 6

2. 3. Klasse: Vollständiger Schularbeitstext

1. a) Teile die Strecke a = 11,5cm im Verhältnis 2:5 und beschrifte alle wichtigen Punkte.
   b) Teile die Strecke x = 8,2cm in neun gleich große Teile.
   c) Gib das gezeichnete Verhältnis an:

```
            Y /
             / .                SX  :  XY  =  .........
          X /   .
           /.    .              SX  :  SY  =  .........
          /  .    .
         /    .    .
        /      .    .
      S /-x--x--x--x--x----
```

2. 3. Klasse:

a) $a^4 \cdot a^3 = a^7$ $\qquad \dfrac{a^6}{a^4} = a^2$

Erkläre, weshalb die Ergebnisse richtig sind, indem du die beiden Rechnungen anders aufschreibst. Gib dann auch zu jeder Rechnung die Rechenregel an.

b) In welchen Fällen hat die Potenz a^n einen positiven Wert und in welchem Fall hat sie einen negativen Wert?

c) Erkläre, weshalb 2^3 und 3^2 nicht den gleichen Wert haben.

d) Berechne $(-2)^4$ und -2^4 . Erkläre, weshalb die beiden Potenzen einen verschiedenen Wert haben.

3. Berechne und gib zwischen Angabe und Ergebnis mindestens zwei Zeilen Zwischenergebnisse an:

a) $3.2^3 - 2.4^2 + 5.2^4 =$
b) $3.2^3 - 2.(4^2 + 5.2^4) =$
c) $3.(2^3 - 2.4)^2 + 5.2^4 =$
d) $(3.2^3 - 2).(4^2 + 5.2^4) =$

4. Vereinfache und führe für $x = 3$ die Probe durch:

a) $4\ x^2 - [x + (3\ x^2 - 2x)] =$
b) $4\ x^2 + [x + (3\ x^2 - 2x)] =$

Im Gegensatz zur Schularbeit der vierten Klasse war dieses Schularbeitsergebnis besonders "normal" mit einem Sehr gut, 5 Gut, 12 Befriedigend, 5 Genügend und 2 Nicht genügend.

Zum Unterschied von der Aufgabenstelllung für die vierte Klasse enthält dieser Schularbeitstext 25% Aufgaben mit verbaler Komponente. Die zur Diskussion stehende Aufgabe mit ihren vier Teilen brachte unterschiedliche Erfolge für 2.a) bis 2.d). Pro Teilfrage konnten zwei Punkte erworben werden. Die Punktevergabe zeigt folgendes Muster:

2.a) Schwerpunkt (19 Schüler) bei 1 Punkt
2.b) 14 Schüler mit 0 Punkten, 9 Schüler mit 2 Punkten
2.c) Schwerpunk (20 Schüler) bei 2 Punkten
2.d) 0 Punkte: 7 Schüler,
1 Punkt: 6 Schüler,
1,5 Punkte: 2 Schüler
2 Punkte: 10 Schüler

2.b) fiel den Schülern offensichtlich am schwersten. Bei einer unmittelbar nach der Rückgabe der Schularbeit durchgeführten Schülerbefragung zum Schwierigkeitsgrad dieser Schularbeit wurde folgende Frage gestellt: "Welche Aufgabe war für dich am schwierigsten?"

1. Aufgabe: 1 Schüler
2. Aufgabe: 16 Schüler
3. Aufgabe: 2 Schüler
4. Aufgabe 6 Schüler.

Dies zeigt, daß die verbal besetzten Fragen von Schüler seite als schwierig erlebt werden, obwohl die Ergebnisse zufriedenstellend waren. Offensichtlich sind diese Aufgaben "gewöhnungsbedürftig". Meine achte Klasse allerdings, die ich seit der 5. Klasse betreue, findet verbal besetzte Fragen "ganz normal". Ich bin sicher, daß diese Schüler bei der Vorbereitung auf eine Schularbeit auch überlegen, was ich wohl diesmal für F r a g e n stellen könnte.

Einige Antworten zu den Aufgaben 2.b) und 2.d) sollen noch wiedergegeben zu werden. Zum Beispiel:

zu Aufgabe 2.b):

1. "Wenn die Basis positiv ist, ist es immer positiv. Wenn die Basis negativ ist und in der Klammer steht, kommt es auf die Hochzahl an. Ist die Hochzahl eine gerade Zahl, ist es positiv. Ist sie ungerade, ist die Zahl negativ."

   Beurteilung: richtig (2 Punkte)

2. "Wenn die Basis negativ ist und die Hochzahl positiv => ist die Potenz positiv.
   Wenn die Basis positiv ist und die Hochzahl positiv => ist die Potenz positiv.
   Wenn die Basis negativ ist und die Hochzahl ungerade, ist die Potenz positiv.

   Beurteilung: Falsch, obwohl der mittlere Satz stimmt. Insgesamt liegen aber keine sicheren Kenntnisse über Potenzen vor. (0 Punkte)

zu Aufgabe 2.d):

1. "Die beiden Potenzen haben einen verschiedenen Wert, weil bei $(-2)^4$ wird hoch 4 auf -2 bezogen und bei -2^4 wird hoch 4 nur auf den 2 bezogen und nicht auf das Minus. Das Minus bleibt dann.

   Beurteilung: richtig (2 Punkte)

2. "Weil -2 in Klammer steht." Es fehlten auch die beiden Rechnungen.

   Beurteilung: Ich schrieb dazu "Und was bewirkt das?" und zog für die fehlende Erklärung und die fehlende Rechnung 2 Punkte ab.

Abschließend sollen nun noch die Erfahrungen mit der siebenten Klasse folgen:

T a b e l l e   7

3. 7. Klasse: Vollständiger Schularbeitstext

1. a) Berechne die Steigung der Tangente im Punkt P(2/y) für $y = f(x) = x^3/3$ mit Hilfe des Grenzwertes.
   b) Gib die Gleichung der Tangente im Punkt P an die Kurve an.
   c) Konstruiere die Kurve für $-3 < x < 3$ und die Tangente im Punkt P.
   d) Welche geometrischen Vorstellungen verbindest du mit dem Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten (Gib 2 Möglichkeiten an.)

2. Gegeben ist ein Kreis k: $x^2+y^2-4x-3y=50$.
   a) Stelle die Kreisgleichung in vektorieller Form auf.
   b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Gerade g mit dem Kreis k.

   $$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Wie heißt diese Gerade in bezug zum Kreis?

3. Gegeben ist das Dreick ABC: A(2/-2),B(5/7),C(1/5).
   a) Berechne Mittelpunkt und Radius des Umkreises und stelle die Kreisgleichung des Umkreises auf.
   b) Konstruiere zur Kontrolle das Dreieck und den Umkreis.

In diesem Schularbeitstext beschränkt sich der verbale Anteil auf 6%. Vier von 13 Schülern beantworteten die Frage nicht, vier zum Teil richtig und 5 vollständig richtig. Der Schularbeitserfolg war mit der Notengebung 1 - 6 - 2 - 1 - 3 für die Noten 1 bis 5 unauffällig. Ein Beispiel für eine korrekte Antwort findet sich in Tabelle 4, eine nicht korrekte Antwort war folgende:

> "Grenzwert Limes kommt beim Differentialquotienten dazu, die Tangente wandert vom Punkt P aus immer weiter zu Q."

Dafür wurde keiner der beiden möglichen Punkte gegeben.

7. Für und Wider von Aufgaben zum Argumentieren und Begründen

In Diskussionen wird aus dem Kreise der Kollegenschaft immer wieder argumentiert, daß die Beurteilung der Antworten auf derartige Fragen mit einem Unsicherheitsfaktor behaftet ist, der sich bei reinen Rechenaufgaben nicht zeigt. Dieses verständliche Argument verlangt aber einige Einschränkungen:

1. Wie schon früher kurz erwähnt, beruht die "sichere" Notengebung durch Punktebewertung auf Traditionen. Diese können sich aus der eigenen Erfahrung als Schüler oder Schülerin herleiten oder aus Gepflogenheiten am Schulstandort. Wertvoll wäre es sicherlich, die eigene Punktebewertung mit der von anderen zu vergleichen, nicht, um "alle über einen Kamm zu scheren", sondern um zu wissen, wo man selbst steht.

2. Die Notenvergabe auf Punktebasis liefert eine gute Chance für den Lehrer/die Lehrerin, korrekt und gerecht zu beurteilen. Ich glaube, daß wir Mathematiker und Mathematikerinnen in diesem Punkt ganz besonders empfindlich sind und es besonders gut - und damit meinen wir, besonders korrekt - machen wollen. Dieses Bedürfnis nach Korrektheit und Gerechtigkeit sieht vielleicht manche(r) durch verbal besetzte Aufgaben bedroht.

3. Die Notenvergabe auf Punktebasis ist für die Schüler und Schülerinnen leicht nachvollziehbar und sorgt dadurch - selbst wenn ein sehr strenger Maßstab angelegt wird - für Sicherheit und damit für Beruhigung. Daher ist es so wichtig, bei den zur Diskussion stehenden Aufgabentypen für die Nachvollziehbarkeit in der Notengebung zu sorgen. Dies kann dadurch erreicht werden, daß
   * schon beim Zusammenstellen der Schularbeit der Lehrer für sich eine ihm vertretbar erscheinende Antwort selbst formuliert und einen Minimalinhalt für die richtige Beantwortung festlegt,
   * daß falsche oder unvollständige Antworten entsprechend kommentiert u n d zur Hilfe für den Schüler vom Lehrer eine richtige Variante, die die verbalen Versuche des Schülers aufgreift, ins Schularbeitsheft geschrieben wird.

Ich bin sicher, daß Schüler und Schülerinnen ohne spezielle zusätzliche Maßnahmen im Unterricht trotzdem auf derartige Aufgabenstellungen gut vorbereitet sind, weil das Unterrichtsgeschehen ja genau die verbalen Komponenten enthält, die bei der Schularbeit dann aufgegriffen werden können. Was selbstverständlich vermieden werden muß, ist ein "Überraschungseffekt" der zu unnötiger Nervosität führt. Die Aufgabenstellungen zum Argumentieren und Begründen können zunächst in der Schule im Rahmen von Wiederholungen und Schulübungen aufgegriffen werden, dann in den Hausübungen, bis sie schließlich in den Schularbeitsstoff im engeren Sinn eingegliedert werden können. Es hilft sicher auch, Schüler selbst solche Fragen entwicklen zu lassen, wie es sich ja auch im Bereich numerischer Aufgabenlösungen bewährt hat, Aufgabenstellungen von Schülern entwicklen zu lassen. Das Gefühl der Ausgeliefertheit gegenüber dem Text kann dadurch wesentlich verringert werden.

Leider konnten in diesen Ausführungen nur 3 der insgesamt 52 Aufgabenstellungen genau behandelt werden. Es soll aber abschließend noch ein Hinweis zu den Aufgabenzum Beweise gegeben werden:

Aufgaben, die allgemeine oder exemplarische Beweise verlangen, machen mit 10 (BA) + 7 (BE) Aufgaben ein Drittel aller Aufgaben aus. Sie häufen sich mit 15 Texten in der vierten und fünften Klasse. Vom Inhaltlichen fällt auf, daß es sich dabei vor allem das allgemeine Lösen von Gleichungen und um das Beweisen der Gültigkeit von Formeln handelt.

Selbstverständlich sind diese Beweise im Unterricht durchgenommen worden, sodaß es sich bei der Schularbeit um eine Wiederholung dieser Beweise handelt. Ich halte diese Anforderung an die Schüleraber nicht für zu einfach. Ich darf daran erinnern, daß auch im Laufe des Mathematikstudiums bei Prüfungen sehr häufig bereits bekannte Beweise wiederzugeben waren. Es ist natürlich zu hoffen, daß bei derartigen Aufgabenstellungen nicht nur stur auswendiggelernt, sondern mitgedacht wird. Wenn aber auf Lehrerseite die Sorge besteht, daß ohne Mitdenken auswendiggelernt werden könnte, kann das Verständnis durch eine zusätzliche Frage abgeprüft werden. Denn das Erreichen des Verständnisses ist eines der wesentlichen Ziele des Mathematikunterrichts.

8. Verwendete Literatur

Lehrplan der Unter- und Oberstufe der AHS

Mathematik AHS, Kommentarheft 1 und 2. österreichischer Bundesverlag, Wien 1988

Mathematik, AHS-Oberstufe, Kommentar. österreichscher Bundesverlag, Wien 1991

Fremdwörter - Duden

STEGMÜLLER, W.: Wissenschaftliche Erklärung und Beründung. Springer Verlag Berlin 1974